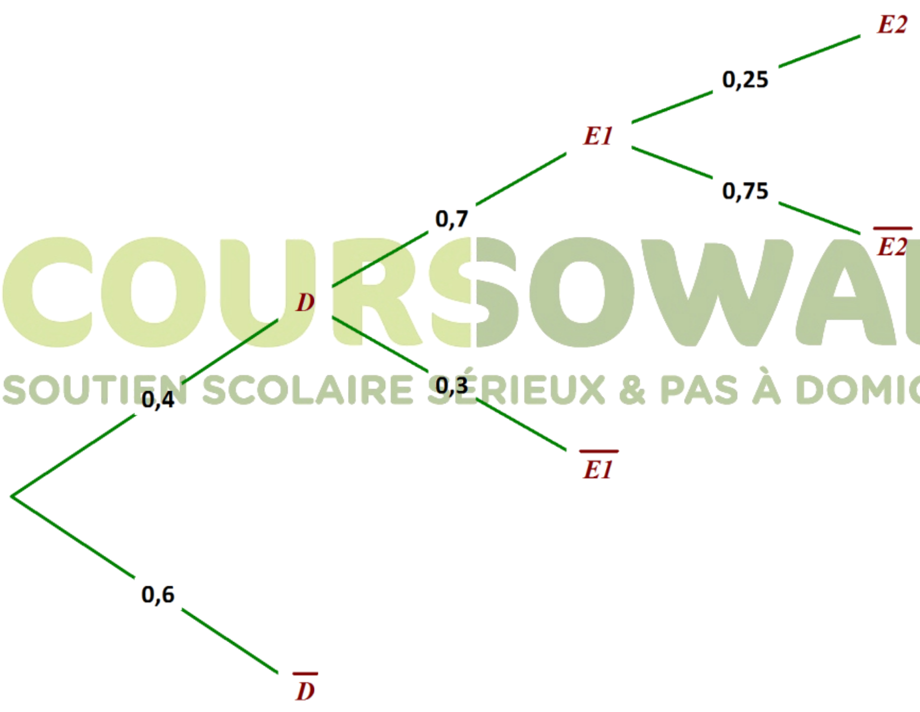
Exercice 1

1. La courbe C' est sous l'axe des abscisses pour $x \in [-3 ;-1]$. **Affirmation vraie**
2. Sur $[-1 ;2]$, $f'(x) \geq 0$. Donc f est croissante sur cet intervalle. **Affirmation vraie**
3. f est croissante sur $[-1 ;2]$. $f(0) = -1$. Donc pour tout $x \in [-1 ;0]$, $f(x) \leq -1$.
   Affirmation fausse
4. L'équation de la tangente à la courbe en 0 est :
   $y = f'(0)x + f(0) = x - 1$.
   Donc le point de coordonnées (1 ;0) appartient à la tangente. **Affirmation vraie.**

Exercice 2

1. **a.**



b. $p(E_1) = p(D \cap E_1) = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

c. $p(F) = p(\overline{D}) + p(D \cap \overline{E1}) + p(D \cap E_1 \cap \overline{E2}) = 0{,}6 + 0{,}4 \times 0{,}3 + 0{,}4 \times 0{,}7 \times 0{,}75 = 0{,}93$

2. Les études sont faites indépendamment les unes des autres. Il y a 5 candidats. Chaque candidat peut être recruté ou non. p(F) = 0,93.

a. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = 0{,}07$

b. On cherche $p(X=2) = \binom{5}{2} 0{,}07^2 \times 0{,}93^3 = 0{,}039$ à 10^{-3} près.

3. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} 0{,}93^n = 1 - 0{,}93^n$

On veut donc que $1 - 0{,}93^n \geq 0{,}999$ c'est-à-dire que $-0{,}93^n \geq -0{,}001$ soit $0{,}93^n \leq 0{,}001$

par conséquent $e^{n \ln 0{,}93} \leq 0{,}001 \quad \Leftrightarrow n \ln 0{,}93 \leq \ln 0{,}001 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln 0{,}93} \approx 95{,}19$

Le cabinet devrait donc traiter au moins 96 dossiers pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999

Exercice 3

Partie A

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x+1} = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x+1} = 1$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln \dfrac{x}{x+1} = 0$

Par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

2. Pour tout $x \geq 1$, $0 < \dfrac{x}{x+1} < 1$. La fonction ln est dérivable sur]0 ;1[.

f est donc une somme de fonctions dérivables sur [1 ;+∞[; elle est donc également dérivable sur cet intervalle.

$$f'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \times \frac{1}{\frac{x}{x+1}} = \frac{-1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \times \frac{x+1}{x} = \frac{-x}{x(x+1)^2} + \frac{x+1}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$$

donc $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 1$

x	1	$+\infty$
f	$0{,}5 - \ln 2$ ↗	0

3. Par conséquent pour tout $x \geq 1$, $f(x) \leq 0$. f est donc négative sur [1 ;+∞[

Partie B

1. Lorsque $n = 3$, l'algorithme affiche $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$

2.

Variables :	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0
Traitement :	Pour i variant de 1 à n Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$ Fin Pour Affecter à u la valeur $u - \ln n$
Sortie :	Afficher u

3. La suite (u_n) semble être décroissante et converger vers 0,57

Partie C

1. $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} - \ln(n)\right)$

$= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} + \ln \frac{n}{n+1} = f(n)$

Or f est négative sur $[1\,;+\infty[$. Donc $u_{n+1} - u_n \leq 0$

la suite (u_n) est donc décroissante.

2. **a.** si $k \leq x \leq k+1$ alors $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{1}{k+1}$ soit $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0$

On intègre donc sur $[k\,;k+1]$, une fonction continue positive. L'intégrale est donc positive.

Par conséquent $\int_k^{k+1} \frac{1}{k}\,dx - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \geq 0$

Soit $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \geq 0$ et donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{k}$

Or $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$

Par conséquent $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$

b. On a donc :

$\ln 2 - \ln 1 \leq \frac{1}{1} = 1$

$\ln 3 - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$

$\ln 4 - \ln 2 \leq \frac{1}{3}$

...

$\ln (n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$

En additionnant les membres de gauche, tous les termes disparaissent à l'exception de $\ln(n+1)$ et $\ln 1$ (= 0)

Par conséquent $\ln (n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

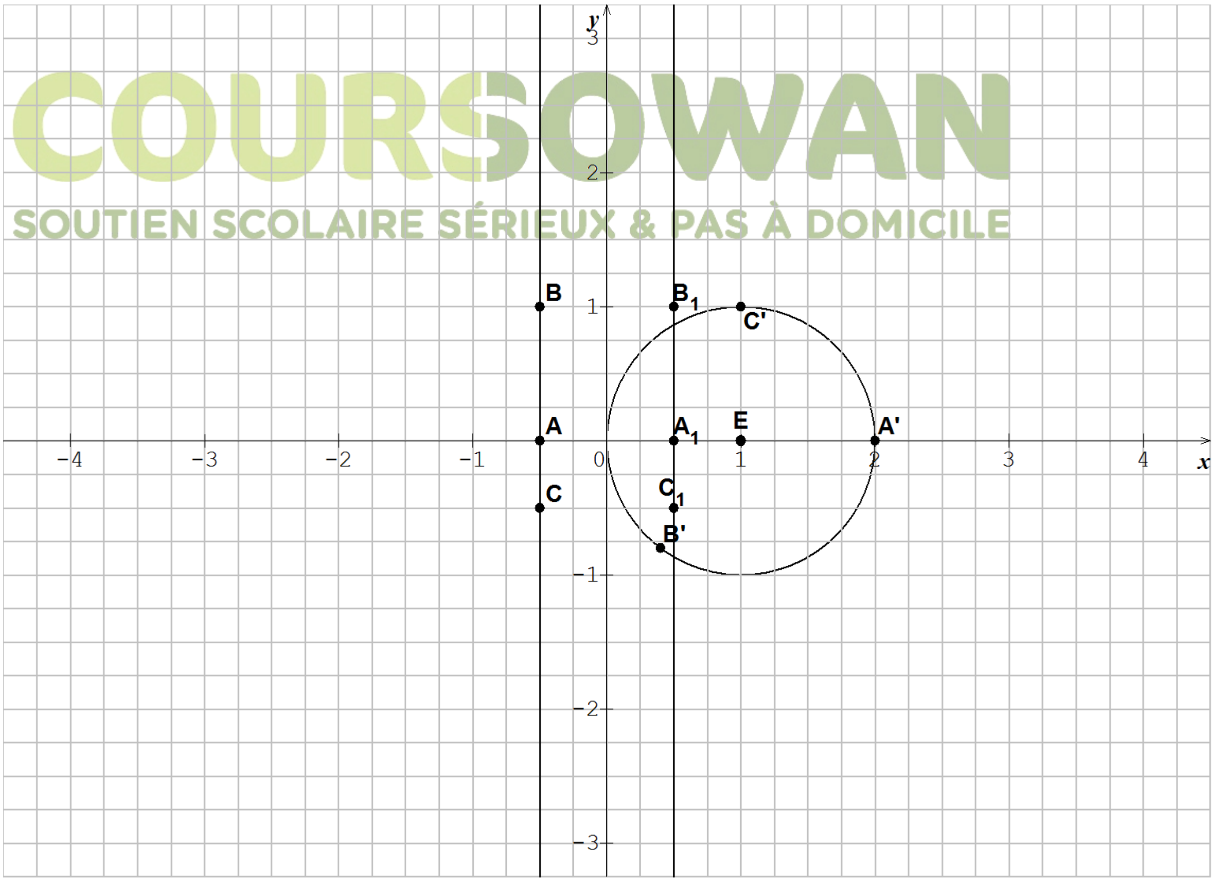
c. Or, pour tout entier strictement positif n, $\ln n \leq \ln (n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$

Donc $u_n \geq 0$

3. La suite (u_n) est donc décroissante et minorée. Elle converge.

Exercice 4 Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. a.



b. $f(-0{,}5) = \dfrac{1}{-0{,}5 + 1} = 2$ $\qquad f(-0{,}5 + \mathrm{i}) = \dfrac{1}{\frac{1}{2} + \mathrm{i}} = \dfrac{\frac{1}{2} - \mathrm{i}}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2} - \mathrm{i}\right) = \dfrac{2 - 4\mathrm{i}}{5}$

$$f(-0{,}5 - 0{,}5i) = \frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{i}{2}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + i$$

c. L'affixe de $\overrightarrow{A'B'}$ est : $\dfrac{2 - 4i}{5} - 2 = \dfrac{-8 - 4i}{5}$.

L'affixe de $\overrightarrow{A'C'}$ est : $1 + i - 2 = -1 + i$

Les 2 vecteurs ne sont pas colinéaires. Les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2. **a.** g est donc la translation de vecteur $\vec{u}$

c. L'ensemble $\mathcal{E}$ des points tels que $|z - 1| = |z|$ est la médiatrice du segment [OE] où E est le point d'affixe 1.

Donc $\mathcal{E}$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

Or $\mathcal{D}_1$ est l'image de $\mathcal{D}$ par la translation de vecteur $\vec{u}$. C'est donc la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

Par conséquent $\mathcal{E} = \mathcal{D}_1$.

3. **a.** L'affixe de A_1 est $\dfrac{1}{2}$. Donc $h\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2 = z_{A'}$

L'affixe de B_1 est $\dfrac{1}{2} + i$. Donc $h\left(\dfrac{1}{2} + i\right) = \dfrac{\frac{1}{2} - i}{\frac{5}{4}} = \dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{2} - i\right) = z_{B'}$

L'affixe de C_1 est $\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}$. Donc $h\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{i}{2}\right) = \dfrac{\frac{1}{2} + \frac{i}{2}}{\frac{1}{2}} = 1 + i = z_{C'}$

b. $\left|\dfrac{1}{z} - 1\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{1 - z}{z}\right| = 1 \Leftrightarrow \dfrac{|1 - z|}{|z|} = 1 \Leftrightarrow |z - 1| = |z|$

c. Par conséquent l'image de $\mathcal{D}_1$ par h est incluse dans le cercle de centre E(1) et de rayon 1.

4. $f = h \circ g$ Donc l'image de $\mathcal{D}$ par f est l'image de $\mathcal{D}$ par $h \circ g$.

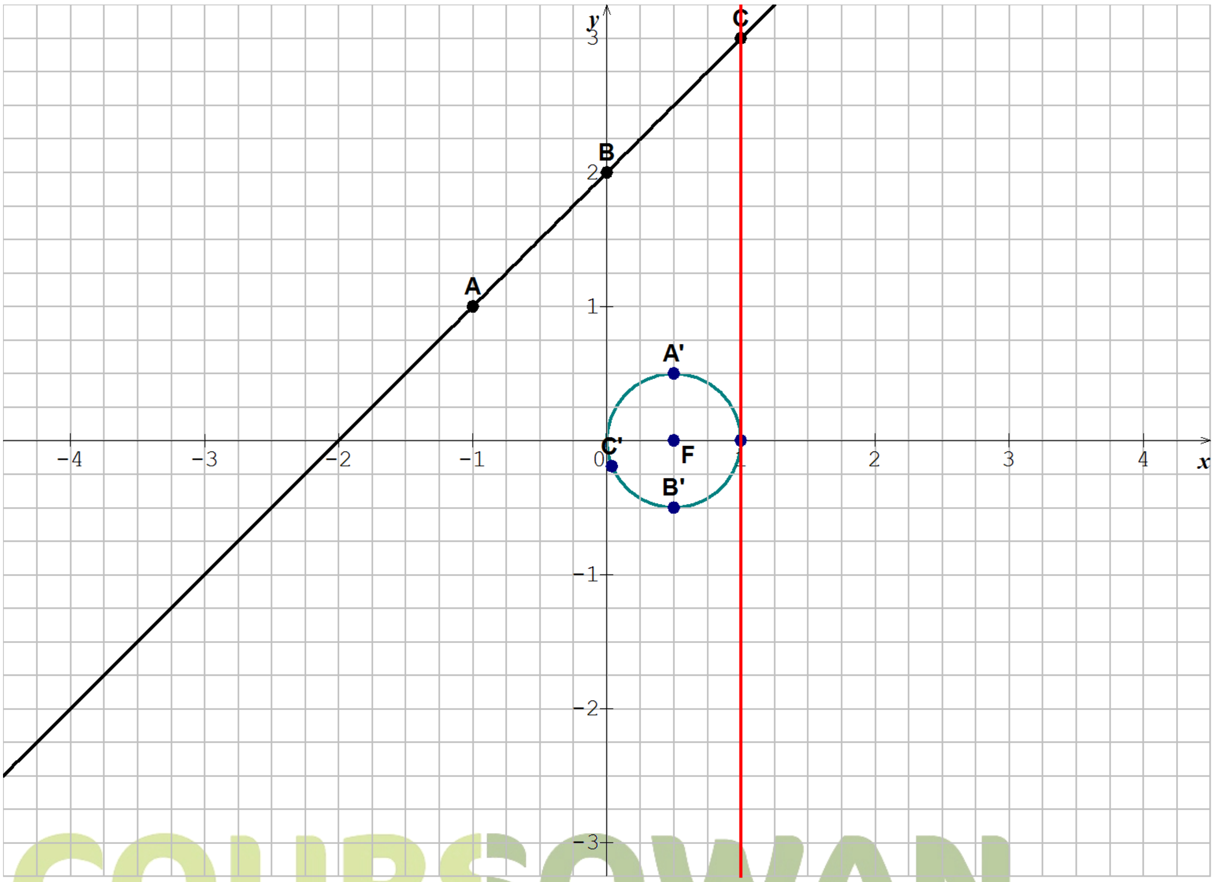
C'est donc l'image de $\mathcal{D}_1$ par h c'est-à-dire le cercle de centre E(1) de rayon 1 privé de O.

Exercice 4 Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. $-1 + 2 = 1$ donc A appartient à $\mathcal{D}$

$0 + 2 = 2$ donc B appartient à $\mathcal{D}$

$1 + 2 = 3$ donc C appartient à .



2. $(1 + \mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i} = 0 \Leftrightarrow (1 + \mathrm{i})z = -3 + \mathrm{i} \Leftrightarrow z = \dfrac{-3 + \mathrm{i}}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{(-3 + \mathrm{i})(1 - \mathrm{i})}{2} = \dfrac{-3 + 3\mathrm{i} + \mathrm{i} + 1}{2}$

$\Leftrightarrow z = -1 + 2\mathrm{i}$

La solution est donc $-1 + 2\mathrm{i}$

$-1 + 2 = 1 \neq 2$ donc le point d'affixe $(-1+2\mathrm{i})$ n'appartient pas à $\mathcal{D}$.

3. **a.** L'écriture complexe de g est $z' = (1 + \mathrm{i})z + 3 - \mathrm{i}$

C'est donc une similitude directe de rapport $k = |1 + \mathrm{i}| = \sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$

L'affixe de son centre est solution de l'équation $\omega = (1 + \mathrm{i})\omega + 3 - \mathrm{i}$

Donc $-\mathrm{i}\omega = 3 - \mathrm{i}$. C'est-à-dire $\omega = \dfrac{-3 + \mathrm{i}}{\mathrm{i}} = 1 + 3\mathrm{i}$

b. $g(-1 + \mathrm{i}) = -1 - 1 + 3 - \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i}$ $\quad z_{A1} = 1 - \mathrm{i}$

$g(2\mathrm{i}) = 2\mathrm{i} - 2 + 3 - \mathrm{i} = 1 + \mathrm{i}$ $\quad z_{B1} = 1 + \mathrm{i}$

$g(1 + 3\mathrm{i}) = 1 + 3\mathrm{i} - 3 + 3 - \mathrm{i} = 1 + 3\mathrm{i}$ $\quad z_{C1} = 1 + 3\mathrm{i}$

c. L'image d'une droite par une similitude est une droite. $\mathcal{D}_1$ passe par A_1 et B_1. Donc son equation est $x = 1$.

4. **a.** Affixe de $h(A_1)$: $h(1 - \mathrm{i}) = \dfrac{1}{1 - \mathrm{i}} = \dfrac{1 + \mathrm{i}}{2}$

Affixe de $h(B_1)$: $h(1 + \mathrm{i}) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{i}} = \dfrac{1 - \mathrm{i}}{2}$

Affixe de $h(C_1)$: $h(1 + 3i) = \dfrac{1}{1 + 3i} = \dfrac{1 - 3i}{10}$

b. $\left|\dfrac{1}{z} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \left|\dfrac{2 - z}{2z}\right| = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{|2 - z|}{2|z|} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow |z - 2| = |z|$

c. L'ensemble des points $\mathcal{E}$ vérifiant $|z - 2| = |z|$ est la médiatrice de [OE] où E est le point d'affixe 2. Cette droite a donc pour équation $x = 1$. C'est $\mathcal{D}_1$.

Par conséquent l'image de $\mathcal{D}_1$ par h est incluse dans le cercle de centre F d'affixe $\dfrac{1}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$.

d. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ privé de 0. Son affixe est donc de la forme

$z = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{i\theta}$. Donc $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}e^{-i\theta}}{|z|^2} = \dfrac{\dfrac{1 + \cos\theta}{2} - \dfrac{i\sin\theta}{2}}{\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)^2 + \dfrac{1}{4}\sin^2\theta}$

$$= \frac{\dfrac{1 + \cos\theta}{2} - \dfrac{i\sin\theta}{2}}{\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{4}\cos^2\theta + \dfrac{1}{4}\sin^2\theta} = \frac{\dfrac{1 + \cos\theta}{2} - \dfrac{i\sin\theta}{2}}{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\cos\theta} = 1 - \frac{i\sin\theta}{1 + \cos\theta}$$

Donc h (M) appartient à $\mathcal{D}_1$. La fonction inverse étant son propre inverse, tout point de $\mathcal{C}$ privé de O est donc l'image d'un point de $\mathcal{D}_1$.

5. $f = h \circ g$ Donc l'image de $\mathcal{D}$ par f est l'image de $\mathcal{D}$ par $h \circ g$.
C'est donc l'image de $\mathcal{D}_1$ par h c'est-à-dire le cercle $\mathcal{C}$ privé de O.